pravougaonik u Ω. Važi $x \in f^{-1}(\Pi)$ ako i samo ako $(u(x), v(x)) \in (a,b) \times (c,d)$ što je ekvivalentno sa $x \in u^{-1}((a,b))$ i $x \in v^{-1}((c,d))$. Sledi

$$f^{-1}(\Pi) = u^{-1}((a,b)) \bigcap v^{-1}((c,d)) \in \mathcal{M},$$

zato što su u i v merljive pa je $u^{-1}((a,b)) \in \mathcal{M}$ i $v^{-1}((c,d)) \in \mathcal{M}$.

Svaki otvoren skup u $\mathbf{R}^2$ je prebrojiva unija otvorenih pravougaonika pa to važi i za svaki otvoren skup u Ω (po uslovu teoreme, Ω je otvoren). Dakle za otvoren skup O u Ω važi $O = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Pi_n$, te je

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Pi_n) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^{-1}(\Pi_n) \in \mathcal{M}.$$

■

U Propozicijama 1.1–1.4 $(X, \mathcal{M})$ je prostor sa σ -algebrom.

Propozicija 1.1. Ako su $u, v : X \to \mathbf{R}$ merljive funkcije, tada su merljive sledeće funkcije $X \to \mathbf{R}$:

a) $x \mapsto u(x) \cdot v(x),\ x \in X$.

Specijalno, $x \mapsto cv(x),\ x \in X$, gde je $c \in \mathbf{R}$.

b) $x \mapsto u(x) + v(x),\ x \in X$.

c) $x \mapsto u(x)/v(x),\ x \in X$, ako je $v : X \to \mathbf{R}_+$.

Dokaz: Dokaz sledi primenom Teoreme 1.2, ako stavimo $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}$, a funkciju ϕ u slučajevima a), b), c) definišemo na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sa,

$$\phi(x,y) = xy; \quad \phi(x,y) = x + y; \quad \phi(x,y) = x/y, y > 0.$$

■

Propozicija 1.2.

1. Ako je funkcija $f : X \to \mathbf{C},\ f(x) = u(x) + iv(x),\ x \in X$ merljiva, tada su merljive i funkcije

   a) $x \mapsto u(x)$; b) $x \mapsto v(x)$; c) $x \mapsto \sqrt{u^2(x) + v^2(x)},\ x \in X$.

2. Ako su $u, v : X \to \mathbf{R}$ merljive funkcije, tada je merljiva funkcija $X \to \mathbf{C}$: $x \mapsto u(x) + iv(x)$.